ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ THƠM

VỀ NỬA NHÓM SỐ HẦU ĐỐI XỨNG VỚI BỘI 5

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ THƠM

VỀ NỬA NHÓM SỐ HẦU ĐỐI XỨNG VỚI BỘI 5

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 84.60.104

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với các luận văn trước đây. Các thông tin, tài liệu trong luận văn đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2020

Học viên

PHẠM THỊ THƠM

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS.TS Nguyễn Thị Dung, giảng viên Trường Đại học Nông Lâm- Đại học Thái Nguyên. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Cô. Trong suốt quá trình làm luận văn, Cô đã dành nhiều thời gian và công sức để chỉ bảo hướng dẫn tôi từ những điều nhỏ nhặt nhất tới những vấn đề khó khăn Cô vẫn luôn kiên nhẫn, tận tình quan tâm giúp đỡ tôi để hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên, những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 9 năm 2020

Học viên

PHẠM THỊ THƠM

Mục lục

Lời cam đoan i

Lời cảm ơn ii

Mục lục iii

Mở đầu 1

1 Kiến thức chuẩn bị 3

1.1 Số Frobenius và tập Apéry 3

1.2 Phân loại các nửa nhóm số 8

1.2.1 Nửa nhóm số đối xứng 8

1.2.2 Nửa nhóm số giả đối xứng 10

1.2.3 Nửa nhóm số hầu đối xứng 12

2 Nửa nhóm số hầu đối xứng bội 5 18

2.1 Đặc trưng nửa nhóm số hầu đối xứng bội 5 18

2.2 Iđêan định nghĩa của vành nửa nhóm số hầu đối xứng bội 5 . . . 25

2.2.1 Vành nửa nhóm số 25

2.2.2 Đặc trưng của iđêan định nghĩa của vành nửa nhóm hầu đối xứng bội 5 28

Tài liệu tham khảo 36

Mở đầu

Cho nửa nhóm số $H = \langle n_1, \ldots, n_r \rangle = \{c_1n_1 + c_2n_2 + \ldots + c_rn_r \mid 0 \leqslant c_i \in \mathbb{Z}\}$ hữu hạn sinh bởi các số nguyên dương $\{n_1, \ldots, n_r\}$. Khi đó ta nói rằng r là *chiều nhúng*, n_1 là *bội* của H với kí hiệu tương ứng là $\mathrm{emb}(H)$ và $e(H)$. Tập *các khoảng trống* là tập $G(H) = \mathbb{N} \setminus H$ và số $g(H) = \mid G(H) \mid$ gọi là *giống* của H. *Số Frobenius*, ký hiệu bởi $F(H)$, là số nguyên lớn nhất không thuộc H. Số nguyên x là *giả Frobenius* nếu $x \notin H$ và $x + h \in H$, với mọi $h \in H \setminus \{0\}$ và tập tất cả các số giả Frobenius của H được ký hiệu là $PF(H)$, số phần tử của tập $PF(H)$ được gọi là *kiểu* của H, ký hiệu bởi $t(H)$. Trong lý thuyết nửa nhóm số, có ba lớp quan trọng được quan tâm nghiên cứu nhiều nhất là nửa nhóm số đối xứng, giả đối xứng và hầu đối xứng. Cho trước một nửa nhóm số bất kỳ, việc xác định xem chúng thuộc loại nào là một bài toán khá phức tạp. Nhiều tác giả đã nghiên cứu về nửa nhóm số với chiều nhúng 3 và việc phân loại các nửa nhóm số giả đối xứng với chiều nhúng 3 đã được mô tả tường minh trong [5], [13]. Ta cũng đã có phân loại của tất cả nửa nhóm số hầu đối xứng có chiều nhúng là 4 với bội $\leqslant 4$, nghĩa là nửa nhóm số có dạng $H = \langle a, b, c, d \rangle$ với $a \leqslant 4$. Nếu $a = 4$ thì $t(H) = 3$ và H là hầu đối xứng nếu và chỉ nếu sau khi thay đổi các biến ta có

$$b = 2\alpha + \beta + 1, c = 2\beta + 2, d = 2\alpha + 3\beta - 1,$$

trong đó α là số nguyên dương và β là số nguyên dương chẵn bất kỳ (xem [12, Định lý 2.6] và [14]). Trường hợp nửa nhóm số hầu đối xứng có chiều nhúng 4 với bội $a = 5$, nghĩa là nửa nhóm số có dạng $H = \langle 5, b, c, d \rangle$, nhờ công trình của H. Nari, T. Numata and K. Wanatabe [14], ta có thể tính được tường minh các số b, c, d (sau khi hoán vị nếu cần thiết) thỏa mãn những điều kiện nhất định và thu được các nửa nhóm số đối xứng, giả đối xứng, hầu đối xứng.

Cho k là một trường. Khi đó vành nửa nhóm số $k[H]$ liên kết với H là đại số con của vành đa thức $k[t]$ được sinh bởi các đơn thức t^{n_i}, hay $k[H] = k[t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}]$. Cho $R := k[x_1, \ldots, x_r]$ là vành đa thức r biến trên k, đặt $I = I_H$ là hạt nhân của toàn cấu tự nhiên $\varphi : R \to S := k[H]$ định nghĩa bởi $\varphi(x_i) = t^{n_i}$, với $0 \leqslant i \leqslant r$. Nếu ta xem R và S như là các vành phân bậc bởi $S_0 = R_0 = k, \deg t = 1$ và $\deg x_i = n_i$, với mọi $1 \leqslant i \leqslant r$ thì với phân bậc này, I là iđêan thuần nhất sinh bởi các nhị thức và được gọi là *iđêan định nghĩa* của H và vành $S \subset k[t]$ có biểu diễn như là thương của R/I.

Vành nửa nhóm số có thể được xem là một trong những cây cầu nối giữa Số học và Đại số, rất nhiều tính chất của nửa nhóm số được phản ánh bởi những tính chất đại số của vành nửa nhóm liên kết với chúng. Đặc biệt, có nhiều nghiên cứu về tính chất đối xứng, giả đối xứng, hầu đối xứng của H thông qua số phần tử sinh của iđêan định nghĩa I (xem [4], [7], [8], [12], [13],...). Ký hiệu $\mu(I)$ là số phần tử sinh của I. Khi chiều nhúng $r = 3$, J. Herzog [8] đã đưa ra đặc trưng đầy đủ về iđêan định nghĩa I và ông đã chứng minh rằng $\mu(I) \leqslant 3$. Khi $r = 4$ và H là nửa nhóm giả đối xứng, iđêan định nghĩa I cũng đã được mô tả chi tiết bởi H. Bresinsky [4] với kết quả chính là $\mu(I) \leqslant 5$.

Mục đích của luận văn là tìm hiểu về nửa nhóm số hầu đối xứng với bội 5 và chiều nhúng 4. Các kết quả của chương này được viết dựa theo bài báo của H. Nari, T. Numata and K. Wanatabe trong [14].

Cấu trúc của luận văn gồm hai chương. Chương 1 dành để nhắc lại các kết quả về số Frobenius, giả Frobenius, tập Apéry và mối liên hệ giữa các khái niệm này. Trong chương 1, việc phân loại thành các lớp nửa nhóm số đối xứng, giả đối xứng, hầu đối xứng chứa nhau và đặc trưng của chúng cũng đã được đưa ra và chứng minh chi tiết.

Chương 2 chứng minh lại các kết quả chính của H. Nari, T. Numata and K. Watanabe trong bài báo [14]. Mục 1 dành để chứng minh chi tiết đặc trưng của các nửa nhóm số có bội là 5 và chiều nhúng 4. Kết quả chính của Mục 2 là hệ quả của Mục 1, đó là tính được tường minh iđêan định nghĩa I của vành nửa nhóm số $k[H]$, qua đó tính được $\mu(I) = 5$ nếu H là giả đối xứng và $\mu(I) = 6$ nếu H là hầu đối xứng với $t(H) = 3$.

Phần kết luận của luận văn tổng kết một số công việc đã thực hiện.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Số Frobenius và tập Apéry

Ký hiệu $\mathbb{Z}$ và $\mathbb{N}$ tương ứng là tập các số nguyên và số nguyên không âm. Ta nói rằng tập $H \subset \mathbb{N}$ là *nửa nhóm* nếu $0 \in H$ và $H + H \subseteq H$. Cho H là nửa nhóm trên $\mathbb{N}$. Nếu tồn tại số $r > 0$ và $n_1 < \ldots < n_r \in \mathbb{N}$ sao cho

$$H = \mathbb{N}n_1 + \ldots + \mathbb{N}n_r = \{k_1 n_1 + \ldots + k_n n_r | k_i \in \mathbb{N}\}$$

thì ta nói rằng H được *sinh* bởi $n_1, \ldots, n_r$. Ta cũng nói rằng H là sinh tối thiểu bởi $n_1, \ldots, n_r$ nếu các tập con thực sự của tập $\{n_1, \ldots, n_r\}$ không sinh ra H. Khi đó ta nói rằng $\mathrm{emb}(H) = r$ là *chiều nhúng*, $e(H) = n_1$ là *bội* của H, tập *các khoảng trống* là $G(H) = \mathbb{N} \setminus H$ và số $g(H) = | G(H) |$ là *giống* của H. Khi đó ta ký hiệu $H = \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$ và nếu $\mathbb{N} \setminus H$ là tập hữu hạn thì ta nói rằng H là *nửa nhóm số*. Ta có kết quả sau đây.

Định lý 1.1.1. *Cho $r \geqslant 2$ và $H = \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$. Khi đó $\gcd(n_1, \ldots, n_r) = 1$ nếu và chỉ nếu $\mathbb{N} \setminus H$ là tập hữu hạn.*

Chứng minh. Giả sử rằng $\mathbb{N} \setminus H$ là tập hữu hạn. Ta đặt $\gcd(n_1, \ldots, n_r) = d$. Khi đó mọi số thuộc tập H đều chia hết cho d nên nếu $d > 1$ thì mọi số tự nhiên có dạng $kd + 1$, với $k \in \mathbb{N}$, đều không thuộc tập H, dẫn đến $\mathbb{N} \setminus H$ là tập vô hạn, suy ra mâu thuẫn. Vậy $d = 1$.

Ngược lại, giả sử $r = 2$, tức là $H = \langle n_1, n_2 \rangle$ và $\gcd(n_1, n_2) = 1$.

• Trường hợp nếu $n_1 = 1$ hoặc $n_2 = 1$ thì $H = \{k_1 n_1 + k_2 n_2 | k_i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Do đó $\mathbb{N} \setminus H = \emptyset$ là tập hữu hạn.

• Trường hợp $n_1 > 1$ và $n_2 > 1$. Theo định lý Bezout, tồn tại các số nguyên tố cùng nhau s_1, s_2 sao cho $s_1n_1 + s_2n_2 = 1$. Ta có thể giả sử rằng $s_1 > 0$ và $s_2 < 0$. Cho $k > 0$ là số nguyên đủ lớn, ta có thể viết $k = qn_2 + t$, trong đó $0 \leq t < n_2$, vì vậy $k = qn_2 + t(s_1n_1 + s_2n_2) = ts_1n_1 + (q + ts_2)n_2$. Vì k là đủ lớn nên ta có $(q + ts_2) > 0$, kéo theo $k \in H$. Do đó $\mathbb{N} \setminus H$ là tập hữu hạn.

Lập luận tương tự với trường hợp $r > 2$. □

Từ Định lý 1.1.1, ta thấy rằng $H = \langle n_1, \ldots, n_r \rangle$ là nửa nhóm số khi và chỉ khi $\gcd(n_1, \ldots, n_r) = 1$. Ta nhắc lại một số định nghĩa và tính chất cơ sở của số Frobenius, giả Frobenius và tập Apéry (xem [1], [3]).

Định nghĩa 1.1.2. (i) *Số Frobenius*, ký hiệu bởi $F(H)$, là số nguyên lớn nhất không thuộc H.

(ii) Ta nói rằng số nguyên x là *giả Frobenius* nếu $x \notin H$ và $x + h \in H$, với mọi $h \in H \setminus \{0\}$. Ta ký hiệu $PF(H)$ là tập các số giả Frobenius của H

$$\begin{aligned} PF(H) &= \{x \notin H \mid x + h \in H, \forall\, 0 \neq h \in H\} \\ &= \{x \notin H \mid x + n_i \in H, \forall i = 1, \ldots, r\}. \end{aligned}$$

(iii) *Kiểu* của H, ký hiệu bởi $t(H)$, là số phần tử của tập $PF(H)$.

(iv) Cho $n \neq 0$ là một phần tử thuộc H. Tập *Apéry* ứng với n của H là tập

$$\mathrm{Ap}(H, n) = \{h \in H \mid h - n \notin H\}.$$

Chú ý 1.1.3. (i) $F(H)$ là số lớn nhất trong tập $PF(H)$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $F(H) \notin PF(H)$. Khi đó tồn tại $h \in H \setminus \{0\}$ sao cho $F(H) + h \notin H$. Nhưng điều này mâu thuẫn với tính cực đại của định nghĩa số $F(H)$. Do đó $F(H)$ là số lớn nhất trong tập $PF(H)$.

(ii) Cho $\leqslant_H$ là một quan hệ hai ngôi xác định trên H như sau: với $d, d' \in \mathbb{Z}$, ta viết $d \leqslant_H d'$ nếu $d' - d \in H$. Khi đó $(\mathbb{Z}, \leq_H)$ là một tập sắp thứ tự từng phần và $PF(H)$ là tập gồm các phần tử cực đại của $\mathbb{Z} \setminus H$ theo quan hệ $\leq_H$.

(iii) Với mỗi nửa nhóm số H, ta ký hiệu tập $g - H = \{F(H) - h \mid h \in H\}$. Khi đó H và $g - H$ là không giao nhau vì $F(H) - h \in g - H$, nếu $F(H) - h \in H$ thì $(F(H) - h) + h = F(H) \in H$, vô lý (xem [5]).

(iv) Số Frobenius là số duy nhất thuộc cả hai tập $PF(H)$ và tập $g - H$. Thật vậy, theo ý (i), ta đã có $F(H)$ là số lớn nhất thuộc tập $PF(H)$. Mặt khác, ta có

$F(H) = F(H) - 0 \in g - H$. Lấy bất kỳ phần tử $x \in g - H$ và $x \neq F(H)$, khi đó tồn tại $0 < h \in H$ sao cho $x = F(H) - h$. Do đó ta có $x + h = F(H) \notin H$, suy ra $x \notin PF(H)$. (xem [5]).

Ví dụ 1.1.4. (1) Cho nửa nhóm $H = \langle 5, 6 \rangle$. Khi đó ta được $F(H) = 19$, và $PF(H) = 19 = \{F(H)\}$ do đó $t(H) = 1$ và $G(H) = \{1,2,3,4,7,8,9,13,14,19\}$ do đó $g(H) = 10$. Tập $g - H = \{1,2,3,4,7,8,9,13,14,19\}$. Ta thấy ngay rằng $G(H) = g - H$ và $F(H) \in PF(H)$ cũng như $F(H) \in g - H$. Tập Apéry là $\mathrm{Ap}(H,5) = \{0,6,12,18,24\}$.

$$\begin{array}{ccccc}
x \in H & & x \notin H & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\boxed{0} & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\boxed{5} & \boxed{6} & 7 & 8 & 9 \\
\boxed{10} & \boxed{11} & \boxed{12} & 13 & 14 \\
\boxed{15} & \boxed{16} & \boxed{17} & \boxed{18} & 19 \\
\boxed{20} & \boxed{21} & \boxed{22} & \boxed{23} & \boxed{24}
\end{array}$$

(2) Cho $H = \langle 4, 7, 9 \rangle$. Khi đó $F(H) = 10$, $PF(H) = \{5, 10\} \supset \{F(H)\}$ nên $t(H) = 2$ và tập các khoảng trống $G(H) = \{1,2,3,5,6,10\}$ do đó $g(H) = 6$. Ta thấy tập $g - H = \{1,2,3,6,10\}$, do đó $F(H) \in PF(H)$ cũng như $F(H)$ thuộc $g - H$. Tập Apéry $\mathrm{Ap}(H,4) = \{0,7,9,14\}$.

$$\begin{array}{cccc}
x \in H & & & x \notin H \\
\downarrow & & & \downarrow \\
\boxed{0} & 1 & 2 & 3 \\
\boxed{4} & 5 & 6 & \boxed{7} \\
\boxed{8} & \boxed{9} & 10 & \boxed{11} \\
\boxed{12} & \boxed{13} & \boxed{14} & \boxed{15}
\end{array}$$

(3) Cho $H = \langle 5, 9, 11, 17 \rangle$. Khi đó $F(H) = 13$, $PF(H) = \{6, 12, 13\}$ nên $t(H) = 3$ và $G(H) = \{1,2,3,4,6,7,8,12,13\}$, do đó $g(H) = 9$. Ta tìm được tập $g - H = \{2,3,4,8,13\}$. Rõ ràng rằng $F(H) = 13$ thuộc cả hai tập $PF(H)$ và